数　学（その1）

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) A，Bの二人がそれぞれ2枚の硬貨を持って同時に投げ，表の出た枚数の多い方を勝ちとする。勝負がつかないときは再び硬貨投げを繰り返し，どちらかが勝つまで続けるとする。ただし，どの硬貨も表の出る確率は $\frac{1}{2}$ とする。

(1-1)　1回の硬貨投げでAが勝つ確率を求めよ。

(1-2)　1回の硬貨投げで勝負がつかない確率を求めよ。

(1-3)　n 回目の硬貨投げでAが勝つ確率を求めよ。ただし，n は正の整数とする。

(1-4)　硬貨投げの回数が n 回以下で勝負がつく確率を求めよ。ただし，n は正の整数とする。

(2) 三角形OABは辺の長さが $a(a>0)$ の正三角形である。辺OAを $1:2$ に内分する点をL，OBを $2:1$ に内分する点をMとし，線分AM，BLの交点をNとする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(2-1)　$\overrightarrow{ON}=x\vec{a}+y\vec{b}$ となる実数 x，y を求めよ。

(2-2)　線分NAの長さを求めよ。

(2-3)　線分NLの長さを求めよ。

(2-4)　$\angle ANL=\theta$ とおく。$\cos\theta$ を求めよ。

2 自然数 n に対して，正の整数 a_n，b_n を

$$(4+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$$

により定める。ただし，上の式を満たす整数 a_n，b_n がただ一組に限ることは使用してよいとする。次の各問に答えよ。

(1) a_1，b_1 および a_2，b_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(3) 任意の n について，a_n を 3 で割ると 1 余ることを示せ。

(4) 任意の n について，b_n を 3 で割った余りと n を 3 で割った余りは等しいことを示せ。

数　学（その２）

3　次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$3^x = 5^y = 7^z = t$ で $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2$ であるとき，t の値を求めよ。

(2)　不等式 $\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} > \tan\theta \left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3)　２つの行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ がある。次の問に答えよ。

(3-1)　行列 B の逆行列 B^{-1} を求めよ。

(3-2)　$A = B^{-1}CB$ となる行列 C を求めよ。

(3-3)　A^n を求めよ。ただし，n は自然数とする。

4 次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $f(x) = \sin x + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 放物線 $y = 3x^2$ と 3 直線 $x = a$，$x = 1$，$y = 0$ で囲まれた部分を S_1 とする。また，放物線 $y = 3x^2$ と 2 直線 $x = a$，$y = 0$ で囲まれた部分を S_2 とする。ただし，a は $0 < a < 1$ を満たす実数とする。次の問に答えよ。

(2-1) S_1 を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ。

(2-2) S_2 を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ。

(2-3) $V_1 + V_2$ の最大値を求めよ。