

数 学 (その1)

1 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 箱の中に1から n までの番号のついた n 枚のカードが入っている。この中から2枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた数のうち最大のを X とする。ただし、 n は $n \geq 2$ を満たす正の整数とする。また、カードはすべて同形かつ同じ重さとする。

(1-1) k は $2 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。 $X \leq k$ となる確率 $P(X \leq k)$ を求めよ。

(1-2) k は $2 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。 $X = k$ となる確率 $P(X = k)$ を求めよ。

(1-3) X の期待値を求めよ。

(2) 四角形OABCは $OA = OB = 1$, $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle OBC = 90^\circ$ を満たしている。 $BC = t$ ($t > 0$)とおく。また、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく。

(2-1) 内積 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。

(2-2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ を t を用いて表せ。

(2-3) ベクトル \vec{c} を実数 x, y により $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と書くとき、 x, y を t を用いて表せ。

(2-4) 線分ACとOBの交点が線分ACの midpointとなるような t の値を求めよ。

2

a, b は $a + b, ab$ がともに整数となるような実数であり, しかも $a + b$ は奇数, ab は偶数である。次の各問に答えよ。

- (1) $a^2 + b^2$ は整数であり, しかも奇数であることを示せ。
- (2) $a^3 + b^3$ は整数であり, しかも奇数であることを示せ。
- (3) 任意の自然数 n について, $a^n + b^n$ は整数であり, しかも奇数であることを示せ。
- (4) このような実数 a, b で, いずれも整数ではないような例を示せ。

数 学 (その2)

3 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 不等式 $\log_8(1-x) + \log_{64}(x+2) \geq \log_4 x$ を解け。

(2) $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{10}{3}$ ($0 < x \leq \frac{\pi}{4}$) のとき、 $\sin x + \cos x$ の値を求めよ。

(3) 行列 $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ で表される移動によって、直線 $y = 3x$ 上の点 $(t, 3t)$ が実数 t の値にかかわらずつねに直線 $y = 3x$ 上の点に移るための、 a, b の条件を求めよ。

(4) 2次正方行列 A はその逆行列 A^{-1} と一致し、 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ を満たしている。 A を求めよ。

4 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 2つの放物線 $C_1: y = x^2 - 2x + 3$, $C_2: y = x^2 + 2x - 1$ について、次の問に答えよ。

(1-1) 放物線 C_1 と C_2 に共通な接線の方程式を求めよ。

(1-2) 放物線 C_1 , C_2 , および(1-1)で求めた接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 次の問に答えよ。

(2-1) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$ の値を求めよ。

(2-2) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ の値を求めよ。

(2-3) $I = \int_{-\pi}^{\pi} (x + 1 + k \sin x)^2 dx$ を最小にする実数 k の値を求めよ。

(2-4) (2-3)の I の最小値を求めよ。