

数 学 (その1)

1 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = \frac{3}{2}$ 、 $a_{n+1} = 2a_n(a_n + 1)$ ($n \geq 1$) を満たしている。

(1-1) $b_n = a_n + \frac{1}{2}$ とおく。 b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(1-2) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 三角形 ABC の辺 AB の中点を M とし、点 M から辺 CA、CB に下した垂線の足をそれぞれ E、F とすると、 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ 、 $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ であった。 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ とおく。

(2-1) ベクトル \overrightarrow{ME} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

(2-2) 3 辺の長さの比 BC : CA : AB を求めよ。

(3) $0 \leq x < 2\pi$ とする。次の不等式を解け。

$$\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$$

(4) 関数 $f(x)$ は、関係式

$$(x^2 + x - 6)f(x) = ax^4 + bx^2 + c + d \sin(x^2 - 4)$$

を満たしている。ここで、 a 、 b 、 c 、 d は実数である。

(4-1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$ であるとき、 a 、 b の値を求めよ。

(4-2) (4-1)において、さらに $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 24$ であるとき、 c 、 d の値を求めよ。

2 実数 t に対し、 t を超えない最大の整数を記号 $[t]$ で表す。次の問に答えよ。

(1) 任意の実数 x に対して、次の等式①が成り立つことを示したい。

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] \quad \dots \text{①}$$

いま、実数 x を、整数 m と $0 \leq \alpha < 1$ を満たす実数 α により、 $x = m + \alpha$ と表す。

(1-1) $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ とする。このとき、等式①が成り立つことを証明せよ。

(1-2) $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ とする。このとき、等式①が成り立つことを証明せよ。

(2) 任意の実数 x 、および $n \geq 2$ を満たす任意の整数 n に対して、次の等式②が成り立つことを証明せよ。

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx] \quad \dots \text{②}$$

数 学 (その2)

3 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq \beta$ の範囲で定義され、 $\int_a^\beta f(x) dx = 1$ 、 $\int_a^\beta xf(x) dx = A$ である。

関数 $g(y)$ を $g(y) = \int_y^\beta f(x) dx$ ($a \leq y \leq \beta$) と定義するとき、以下の問に答えよ。

(1-1) $\frac{dg(y)}{dy}$ を関数 f を用いて表せ。

(1-2) $\int_a^\beta g(y) dy$ の値を求めよ。

(2) xy 平面上の2つの曲線 $y = x^2 + a$ (a は実数) と $x^2 + y^2 = 1$ が4つの異なる共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) 半径 r の円に正24角形が内接している。この正24角形の面積を求めよ。

4

『』内の文章を読み、以下の問(1)~(4)に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

『疾患Dに関係する2種類の遺伝子XAとXBがある。人は必ずXAかXBのどちらか一方のみを持ち、どちらも持たない、あるいは両方を持つという人は存在しないものとする。

今、無作為に1人の人を抽出すると、その人がXAを持つ確率が0.2である集団について考える。この集団に属しかつXAを持つ人の中から、無作為に1人の人を抽出すると、その人が疾患Dである確率は $a(0 \leq a \leq 1)$ である。同様に、この集団に属しかつXBを持つ人の中から、無作為に1人の人を抽出すると、その人が疾患Dである確率は $b(0 \leq b \leq 1)$ である。』

- (1) この集団から無作為に1人を抽出しその人を元に戻す。これを2回繰り返したところ、抽出された2人のうち、一方の人がXAを持ち、残りの人がXBを持っていた。この条件の下で、この2人が両方とも疾患Dである条件つき確率を求めよ。
- (2) この集団から無作為に1人を抽出するとき、その人が疾患Dである確率を求めよ。
- (3) この集団から無作為に1人を抽出したところ、その人は疾患Dであった。この条件の下で、この人がXAを持つ条件つき確率を求めよ。
- (4) (3)の確率が0.5以上となるために、 a, b が満たすべき条件を求めよ。